MATEMATICA FINANCIERA

Profesor

MEMPHIS VIVEROS
Máster en Finanzas, U. Icesi – Illinois I.T. (Chicago)
Especialista en Finanzas, U. Icesi
Economista, Universidad del Valle

www.creadoresdevalor.com

MATEMATICA FINANCIERA

OBJETIVO

Estudio de los métodos y técnicas de la Matemática Financiera, los cuales permitirán a los asistentes un enfoque analítico de los aspectos financieros, con el propósito de optimizar los recursos económicos.

CONTENIDO

Introducción

Tasa de interés simple

Tasa de interés compuesto

Valor del dinero en el tiempo

Inflación

Devaluación

Tasa de interés nominal

Tasa de interés efectiva

DTF (Tasa anticipada)

Cuota fija (anualidad)

Cuota sobre saldo

Gradiente (UVR)

VPN

TIR

INTRODUCCION

"No exigirán de un compatriota que les pague interés por el préstamo que le hayan hecho, sea de dinero, de comestibles o de cualquier cosa de las que prestan cobrando interés. Al extranjero podrán exigirle que les pague interés sobre un préstamo, pero no deberán hacerlo con un compatriota. Así el Señor su Dios los bendecirá en todo lo que hagan en el país que van a ocupar." (Deuteronomio 23, 19-20). Discursos y alocuciones de Moisés al pueblo de Israel antes de la entrada a la Tierra Prometida donde prescribe leyes, reglas y advertencias a finales del siglo XIV antes de Cristo.

TREINTA Y CUATRO SIGLOS DESPUES…

Keynes, John Maynard (1936). Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero.

Tasa de interés es la recompensa por privarse de liquidez durante un periodo determinado.

Dinero es cualquier dominio sobre un poder general de compra del que el poseedor no se desprende por un período mayor de tres meses y deudas lo que sólo puede recuperarse en períodos más largos.

Si por un préstamo de $1.000.000 se cobran $1.240.000 al final de un año en una sola cuota, tenemos que se devuelve el monto principal de $1.000.000 más $240.000 de intereses.

El porcentaje que se cobra por ese dinero se llama tasa de interés.

Entonces, $240.000 de intereses que se cobraron en el préstamo anterior equivalen al 24% de Tasa de interés:

$$\text{Tasa de interés} = \frac{\text{intereses}}{\text{Principal}} = \frac{\$240.000}{\$1.000.000} = 0.24 = 24\%.$$

Mientras no se especifique lo contrario, la tasa de interés se entenderá como anual.

TASA DE INTERES SIMPLE

El interés simple se define como un porcentaje fijo del monto principal:

$$F = P\ (1 + ni)$$

Donde
F= Valor futuro
P = Valor presente (monto principal)
n = Período del préstamo
i= Tasa de interés (decimales)

Ejemplo 1.1:

Un préstamo de $1.5000.000 a 3 años, a una tasa de interés simple del 24%.

F= ?
P= $1.500.000
n= 3 años
i= 24%

Entonces:

F = $1.500.000 (1 + 3 x 0.24)

F= $1.500.000 (1 + 0.72)

F= $2.580.000

TASA DE INTERES COMPUESTO

Cuando el interés se capitaliza, el tiempo total se divide en varios períodos de interés (un año, tres meses, un mes). El interés se abona al final de cada período de interés y se deja capitalizar de un período al siguiente:

$$F = P\,(1 + i)^{n}$$

Donde
F= Valor futuro
P = Valor presente (monto principal)
n = Período del préstamo
i= Tasa de interés (decimales)

Ejemplo 1.2:

Si en el ejemplo 1.1 el interés era simple, suponga ahora que el interés es capitalizable anualmente, entonces:

$F = \$1.500.000\,(1 + 0.24)^{3}$

F= $1.500.000 (1.906624)

F= $2.859.936

Ejercicio 1.1:

¿Cuánto dinero recibiré al final de 5 años por $2.350.000 a una tasa de interés simple del 24%?

Ejercicio 1.2:

¿Cuánto dinero recibiré en el ejercicio 1.1. si la tasa de interés es capitalizable cada año?

Ejercicio 1.3:

¿Cuánto dinero recibiré en 3 años por $2.350.000 si la tasa de interés es 24% anual trimestre vencido?

Ejercicio 1.4:

Cuánto dinero recibiré en 5 años por $4.100.000 si la tasa de interés es de 18% anual mes vencido?.

Ejercicio 1.5:

Cuánto dinero recibiré en 5 años por $4.100.000 si la tasa de interés es de 18% anual semestre vencido?.

VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO

“**Porque** la importancia del dinero surge esencialmente de que es un eslabón entre el presente y el futuro” (Keynes 1936).

Como el dinero puede ganar interés, su valor aumenta a través del tiempo, por ende se espera que el valor futuro sea mayor que el valor presente:

$$F = P\,(1 + i)^{n}$$

Ejemplo 1.3: Si $1.000 de hoy a una tasa del 24% anual son equivalentes en cinco años a:

$$F = \$1.000\,(1 + 0.24)^{5}$$

$$F = \$2.931,62$$

Pero, si el dinero crece hacia el futuro, debe decrecer del futuro hacia el presente (deflactar)

Ejercicio 1.6:

Cuál es el valor presente de $2.931.62 a una tasa del 24 % anual descontando 5 años?.

Es de destacar, entonces que la tasa para los préstamos (cuota creciente, decreciente o fija) y para la liquidación de depósitos en Colombia (a la vista ó a término), está calculada con interés capitalizable (compuesto).

INFLACION

"Es probable que el nivel general de precios no suba mucho cuando la producción crece, mientras se disponga de recursos eficaces de todas clases sin ocupación. Pero tan pronto como la producción haya subido lo suficiente para empezar a alcanzar "embotellamientos", es probable que ocurra un alza violenta en los precios de ciertas mercancías" (Keynes 1936).

La inflación es el aumento en el nivel general de precios (IPC) de un año a otro, el IPC – Índice de precios al consumidor es el valor estimado de la canasta familiar de artículos necesarios para subsistencia para una familia promedio de 4 integrantes en el área urbana.

Ejemplo 1.4: si el IPC del año 2005 fue de $415.000
Y en el año 2006 fue de $433.675

Entonces el IPC creció $18.675/ $415.000= 4.5%.

De esta manera se dice que la inflación fue del 4.5% para el año 2006.

Para determinar el precio futuro de un artículo se tiene:

$$F = P\,(1 + i)^{n}$$

Donde F= precio futuro del artículo

P= precio presente del artículo

i = tasa de inflación anual (expresada en decimales)

n =número de períodos (años)

Ejemplo 1.5: Si en Colombia esperamos una inflación proyectada del 5% para el próximo lustro, cuánto valdrá el alquiler de un apartamento dentro de 5 años si hoy vale $250.000.

Entonces $F= \$250.000\,(1 + 0.05)^{5}$

$F = \$250.000\,(1.276282)$

$F= \$319.070$

R/ El valor esperado del alquiler del apartamento en 5 años es de $319.070.

DEVALUACION

La devaluación es la pérdida de valor de la moneda doméstica (el peso) frente a la moneda extranjera (el dólar).

Ejemplo 1.6: Si la tasa de cambio hace un año era Col$1980/ US$ 1 y hoy fuera Col$2.000/US$1, entonces el dólar habría subido Col$20/Col$1.980 = 1.01%

Estoy quiere decir que el peso se habría devaluado un 1.01% frente al dólar en el último año.

La devaluación del dólar se debe específicamente a: un déficit en la balanza de pagos, a mayor demanda de la divisa, a incertidumbre de los consumidores e inversionistas y a una mayor inflación en Colombia vs la inflación externa.

Pregunta: ¿cómo afecta la revaluación a los exportadores, importadores, la deuda externa y la inversión?

Pero si están ingresando más dólares (oferta) de los que se requieren en el país (demanda), si hay más confianza en los consumidores e inversionistas y la inflación es menor cada vez vs la inflación externa. Se puede valorizar el peso colombiano frente al dólar estadounidense, este fenómeno se conoce como revaluación.

Pregunta: ¿cómo afecta la revaluación a los exportadores, importadores, la deuda externa y la inversión?

<u>Balanza de pagos:</u>

Es la contabilización del ingreso y salida de divisas del país, exportaciones, importaciones, pagos de la deuda, transferencias, entre otros.

<u>Demanda de divisas:</u>

Es la tendencia de los consumidores, inversionistas y demás agentes económicos a comprar divisas para transacciones, especulación o por precaución.

<u>Incertidumbre de los consumidores:</u>

Cuando existen problemas de orden público, proyectos de reforma tributaria o inestabilidad política como en Venezuela, se aumenta la demanda por divisas debido a temores que desestimulan la inversión en moneda doméstica (pesos).

Inflación:

Si en Colombia los precios suben más que en Estados Unidos, nuestros exportadores tienen mayores costos domésticos y sus ingresos por exportación no suben de igual manera, por eso la devaluación les permite recibir más pesos por dólar y compensar sus costos y ganar algún dinero.

Cálculo de la tasa real de un crédito externo en dólares:

Ejemplo 1.7.

Préstamo: US$100.000
Tasa de interés 8 % anual vencido
Tasa spot (contado) = Col $ 1.980/US$1
Devaluación 1.01%
Tasa de cambio un año: 1.980 x 1.0101 = Col $2.000/ US$1

Entonces, el préstamo es de US$100.000 x Col $1.980 = Col $198.000.000

Al año, se pagan el crédito más los intereses: US$100.000 x 1.08 =US$108.000

Al mismo tiempo el dólar vale Col$2.000 x US$108.000 = Col $216.000.000

Entonces devuelve Col$216.000.000 y el préstamo fue de Col$198.000.000, es decir que los intereses fueron de Col$18.000.000/Col $198.000.000 = 9.09%.

Mediante fórmula también podemos calcular la tasa real:

$$\text{Tasa real} = [(1+i) \times (1+d)] - 1$$

Dónde:

i = Tasa de interés anual
d = Tasa de devaluación anual

Para el crédito anterior:

Ejemplo 1.8.

$$\text{Tasa real} = [(1+0.08) \times (1+0.0101)] - 1$$

$$\text{Tasa real} = 1.0909 - 1$$

$$\text{Tasa real} = .0909 = \underline{9.09\%}$$

Ejercicio 1.7.

Se obtiene un crédito por US$175.000 a una tasa del 7,5% anual vencido, la devaluación esperada es del 6% anual. Fije Usted una tasa de cambio spot.

Calcule cuánto debo pagar al final en pesos y cuál es la tasa de interés real por los dos métodos.

TASA NOMINAL

Es la tasa anual que se usa para liquidar los intereses de un crédito o un depósito a término, entre otros. Esta tasa se reconoce debido a que se específica la periodicidad de liquidación, por ejemplo: anual mes vencido, anual trimestre anticipado, anual semestre vencido, etc.

Ejemplo 1.9: Un Depósito a término por $1.000.000 a un año que gana una tasa del 6% anual mes vencido. Se reconoce que es interés nominal, porque indica la periodicidad del pago (APR- Annual Periodical Rate).

En este depósito, el ahorrador cada mes que vaya por los intereses le pagarán antes de retención en la fuente el 6% / 12 meses = 0.5% efectivo mensual es decir $5.000.

Si la retención en la fuente es del 7% sobre intereses, le darán neto $4.650, es decir que el rendimiento neto de ese mes no es el 0.5% sino el 0.465% x 12 = 5.58% anual mes vencido.

TASA EFECTIVA

Es la tasa real que se paga por un crédito o un depósito a término en un período determinado. La tasa efectiva anual (EFF – Effective) es la tasa de interés capitalizable vencida en un año.

$$EFF = \left(1 + \frac{APR}{n}\right)^{n} - 1$$

Donde:

EFF = tasa de interés efectivo anual

APR = tasas de interés nominal periódica en decimales (ej: 6% = 0.06)

n= número de periodos que se liquidan en el año (ej.: si es mensual, 12 veces)

Ejemplo 1.10.

Calcular el interés efectivo anual del depósito del ejemplo 1.7 paga una tasa de interés del 6% anual mes vencido es decir 0.5% mensual (12 veces al año), entonces:

Entonces:

$$EFF = \left(1+ \frac{0.06}{12}\right)^{12} - 1$$

$$EFF = (1 + 0.005)^{12} - 1$$

EFF = 1.061678 – 1

EFF = 0.061678

EFF = 6.17%

Significa que el interés efectivo anual (real) es del 6.17%. Siempre el interés efectivo anual es mayor que el interés nominal anual debido a que se proyecta su acumulación. (Capitalizable)

Ahora si se quiere comprobar el cálculo de tasas reversamos la anterior fórmula para calcular la tasa nominal.

$$APR = [(1 + EFF)^{1/n} - 1] \times n$$

Ejemplo 1.11.

Para conocer la tasa nominal anual mes vencido del 6.178% efectivo anual:

Entonces:

$APR = [(1 + 0.06178)^{1/12} - 1] \times 12$

$APR = [1.005 - 1] \times 12$

$APR = 0.005 \times 12$

$APR = 0.06$

$APR= 6\%$

Así queda comprobado que una tasa del 6,178% Efectivo anual es 6% anual mes vencido.

Ejercicio 1.8:

Calcule la tasa efectiva anual de un 24% anual mes vencido

Ejercicio 1.9:

Calcule la tasa anual mes vencido para la tasa efectiva anual encontrada en el ejercicio 1.7.

Ejercicio 1.10:

Calcule la tasa anual trimestre vencido del DTF si la efectiva anual es de 7.96%

Ejercicio 1.11:

Calcule la tasa efectiva anual del DTF trimestre vencido que encontró en el ejercicio 1.9

DTF (Tasa Anticipada)

DTF es la tasa promedio anual de depósitos a término fijo a 90 días que pagan las entidades financieras vigiladas por la Superintendencia Financiera, www.superfinanciera.gov.co , excepto corporaciones financieras (que tienen el TCC).

Este promedio se evalúa de lunes a viernes y al final se publica como base para la semana siguiente.

Para convertir la tasa DTF y agregarle el spread, DTF + 4 por ejemplo, se debe tomar la tasa anual trimestre anticipado.

Ejemplo 1.12

Si el DTF es 7.96 TA, entonces simplemente se le agrega el spread de 4:

$$7.96 + 4 = 11.96 \text{ TA.}$$

Pero si el DTF está en modo efectivo, se debe convertir primero a trimestre anticipado y luego si se le suma el spread.

Ejemplo 1.13

DTF igual 8,37 EA, entonces se convierte a trimestre anticipado:

Como el interés es anticipado, anteponemos un signo de menos(-) antes del n así:

$$APR = [(1 + EFF)^{1/-n} - 1] * -n$$

$$APR = [(1 + 0{,}0837)^{1/-4} - 1] * -4$$

$$APR = 7.96\%$$

$$7.96 + 4 = 11.96\% \text{ TA.}$$

Pero si el crédito se paga en cuotas mensuales debemos convertir el 11,96 TA en efectivo primero y luego a mes vencido para la cuota. Entonces:

Ejemplo 1.14.

$$EFF = \left(1 + \frac{APR}{-n}\right)^{-n} - 1$$

$$EFF = \left(1 + \frac{0.1196}{-4}\right)^{-4} - 1$$

$$EFF = 12.91\%\ E.A.$$

Ahora, se calculará la tasa nominal mes vencida:

$$APR = [(1 + EFF)^{1/n} - 1] \times n$$

$$APR = [(1 + 12.91)^{1/12} - 1] \times 12$$

$$APR = 12.20\%\ MV$$

Esto es 12,20% anual mes vencido, si dividimos entre 12, entonces será 1.02% mensual.

Ejercicio 1.12.

Cuál es la tasa mes vencido de un crédito DTF + 2 , si el DTF está al 8%EA.

CUOTA FIJA (Anualidad)

Existen tres formas básicas para liquidar las cuotas de un préstamo:

1) Cuota fija
2) Cuota sobre saldo
3) Cuota creciente (Gradiente)

Cuota fija:

Esta modalidad es la más utilizada en los créditos de consumo (Libre inversión, vehículo, turismo, etc) en el mundo entero.

Se le conoce también como anualidad o PMT (Payment = pago):

$$PMT = \left[\frac{P}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} \right]$$

Donde:

PMT = cuota fija o pago.
P= Valor presente o préstamo
n= Número de cuotas
i= Tasa de interés periódica.

Ejemplo 1.15.

Se necesita conocer la cuota fija mensual de pago de un préstamo de $1.000.000 a 36 meses a un tasa del 24% anual mes vencido (2% mensual):

$$PMT = \left[\frac{1.000.0000}{\frac{1-(1+0.02)^{-36}}{0.02}} \right]$$

PMT= 39.232,85

La cuota fija mensual es de $39.232,85.

Ejercicio 1.13.

Cuál es la cuota fija trimestral para un crédito de $3.000.000 a 3 años que tiene una tasa del 24% anual trimestre vencido.

Ejercicio 1.14.

Cuál es la cuota fija mensual para un crédito de $5.000.000 a 4 años que tiene una tasa del 30% Efectivo anual.

CUOTA SOBRE SALDO

Esta modalidad fue muy utilizada hasta los años 80s, ahora se utiliza de nuevo para créditos con tasa variable (DTF).

Consiste en dividir el monto principal (Valor presente) entre el número de cuotas (n) para encontrar el abono a capital, por aparte se calcula el interés sobre el saldo, así la primera cuota será más alta que en el modo de cuota fija, pero irá bajando hasta la última cuota que será prácticamente el abono a capital de ese pago.

Ejemplo 1.16.

Un crédito por $1.200.000 al 24% anual mes vencido a 12 meses:

Cuota #	Abono a Capital	Abono a Intereses	Total Cuota mes	Nuevo Saldo Préstamo
1	$100.000	$24.000	$124.000	$1.100.000
2	100.000	22.000	122.000	1.000.000
3	100.000	20.000	120.000	900.000
4	100.000	18.000	118.000	800.000
5	100.000	16.000	116.000	700.000
6	100.000	14.000	114.000	600.000
7	100.000	12.000	112.000	500.000
8	100.000	10.000	110.000	400.000
9	100.000	8.000	108.000	300.000
10	100.000	6.000	106.000	200.000
11	100.000	4.000	104.000	100.000
12	100.000	2.000	102.000	0

Ejercicio 1.15.

Determine la cuota fija para el ejemplo anterior y comente los resultados.

GRADIENTE (UVR)

Una serie de gradiente es una serie de pagos anuales en la que cada pago es mayor que el anterior por una cantidad constante, G.

El sistema UPAC (Unidad de poder adquisitivo constante) nació en 1972 como una política de gobierno en Colombia con tres objetivos importantes:

1) Evitar la fuga de capitales por desestimulo del ahorro tradicional.
2) Estimular la compra de vivienda financiada a largo plazo
3) Fomentar la construcción como sector líder en la economía.

El UPAC era un sistema de cuota creciente a una tasa de corrección monetaria + spread, donde la corrección monetaria estaba ligada a la inflación. Pero en 1994 aproximadamente, el gobierno decidió ligar la corrección monetaria a la DTF (Cdt´s), y esto hizo que el costo aumentara y el sistema colapsó.

En el año 1999 nació la UVR (Unidad de valor Real) como reemplazo al UPAC y este nuevo sistema volvió a tener una corrección monetaria ligada a la inflación.

En esta modalidad, se tienen dos tasas combinadas, la de corrección monetaria y el spread, por ejemplo CM + 11 (Corrección monetaria + 11). La fórmula para encontrar la tasa real de este crédito es:

$$\text{Tasa real: } [(1+i) \times (1+cm)] - 1$$

Donde:
i= Tasa de interés ó Spread
cm= Tasa de Corrección Monetaria

Ejemplo 1.17.

En un crédito con UVR, el gobierno garantiza la corrección monetaria en 5% y los bancos hipotecarios prestan a CM + 11.

$$\text{Tasa real} = [(1+i) \times (1+cm)] - 1$$

$$\text{Tasa real} = [(1+0.11) \times (1+0.05)] - 1$$

$$\text{Tasa real} = (1.11*1.05) - 1$$

$$\text{Tasa real} = 16.55\%$$

Ejercicio 1.16.

Calcule la tasa real de un crédito hipotecario con UVR, si la corrección monetaria es del 6,5% y los bancos hipotecarios prestan a cm + 10,5.

Ejemplo 1.18.

Ahora, si se desea conocer el valor que se debe tener hoy en una cuenta de ahorros en dólares que paga al 6% anual , para dejar de trabajar 15 años y poder retirar US$5.000 anuales al final del primer año y aumentar la cantidad que retira en US$1.000 cada uno de los siguientes años:

$$P = R1\ (P/A,\ i\%,n) + \frac{G}{I}\ [(P/A,i\%,n)-n(1+i)^{-N}$$

Donde:
P= Valor presente ó incógnita
A= PMT = -1
i%= Tasa de interés
n= Número de períodos
R1= Primera cuota

Entonces:

$$P = R1\ (P/A,\ i\%,\ n) + \frac{G}{I}\ [(P/A,\ i\%,\ n)-n(1+i)^{-n}$$

$$P = US\$5.000\ (P/A,\ 6\%,\ 15) + \frac{US\$1.000}{0.06}\ [(P/A,\ 6\%,\ 15)-15(1+0.06)^{-15}$$

$$P= US\$5.000\ (9.7123) + US\$16.666,67\ [(9.7123) – 6.258976]$$

$$P= US\$48.561,\ 50 + US\$57.555.41$$

P= US$106.116.91

El gradiente también puede usar una serie decreciente.

Ejercicio 1.17.

Cuál es el valor presente de una serie de retiros de $20.000 al final del primer mes, creciendo $1.000 mensual durante 12 meses a una tasa del 24% anual mes vencido.

VPN

VPN significa valor presente neto y es el nombre que se le da al flujo de efectivo descontado o DCF (Discounted Cash Flow).

$$VPN = -CF0 + \frac{CF1}{(1+i)^1} + \frac{CF2}{(1+i)^2} + ... + \frac{CFj}{(1+i)^j}$$

Donde:

VPN = Valor presente neto o flujo de caja descontado
CF0...j= Flujo de caja desde 0 (inicial) hasta j (final). Cash Flow.
i= Tasa de descuento o de oportunidad o costo de capital.
n= Número de períodos a descontar.

Ejercicio 1.18.

Una inversión en una fotocopiadora asciende a $6.000.000, el primer año arroja $2.500.000 de flujo de caja, el segundo $3.000.000 y el tercero $3.500.000, en este último año el valor de salvamento de la fotocopiadora es de $600.000. Calcule el VPN a una tasa de descuento del 8% anual.

TIR

La TIR significa Tasa interna de retorno y equivale a la tasa de rentabilidad del flujo de caja (CF1...0) de una inversión (-CFo).

La TIR también equivale a la tasa de descuento a la cual el VPN es cero (0).

El método a utilizar es el de prueba y error.

Ejemplo 1.19.

Si a una tasa de descuento de prueba del 15% el VPN es $281,58 debemos aumentar la tasa ya que falta para llegar a VPN cero (0).

Entonces usamos el 20% y VPN es igual a -$5.140.85 y nos excedimos, pero la tasa está entre 15 y 20%.

Ahora se interpola:

i%	VPN
15%	$281.58
i% *	0
20%	-$5.140,85

$$i\%^* \cong 15\% + \frac{0 - \$281.58\,(20\% - 15\%)}{-\$5.140.85 - \$281.58} = 15.26\%$$

Ejercicio 1.19.

Encuentre la Tasa interna de retorno TIR para el ejercicio 1.18.